Correction MathI

Partie I

1. a) $\cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t$, donc

2

$$F(x) = \frac{\cos x}{x}\int_0^x f(t)\ \cos t\ dt + \frac{\sin x}{x}\int_0^x f(t)\ \sin t\ dt. \tag{2}$$

---

b) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions $f_1(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \cos t\ dt$ et $f_2(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \sin t\ dt$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = 0$, $f_1'(0) = f(0)$ et $f_2'(0) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0} \cos x \dfrac{f_1(x)}{x} + \sin x \dfrac{f_2(x)}{x} = f(0)$. Il en résulte que F est continue sur $\mathbb{R}$.

2

---

2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $xF'(x) + F(x) = f(x) - \int_0^x f(t)\ \sin(x-t)dt$, donc

$$\begin{aligned} F'(x) &= -\frac{\sin x}{x} f_1(x) - \frac{\cos x}{x^2} f_1(x) + \cos^2 x \frac{f(x)}{x} + \frac{\cos x}{x} f_2(x) - \frac{\sin x}{x^2} f_2(x) + \sin^2 x \frac{f(x)}{x} \\ &= -\frac{\sin x}{x} f_1(x) - \frac{\cos x}{x^2} f_1(x) + \frac{f(x)}{x} + \frac{\cos x}{x} f_2(x) - \frac{\sin x}{x^2} f_2(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} f_1(x) = \lim_{x\to 0} \cos x \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\frac{f_2(x)}{x} = 0.$$

4=2+2 Il reste à calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{\cos x}{x^2} f_1(x)$.

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{\cos x}{x^2} f_1(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x} - \frac{\cos x}{x^2}\int_0^x \cos t(f(t)-f(0))dt + f(0)\Big(\frac{1}{x} - \frac{\cos x \sin x}{x^2}\Big).$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{\cos x \sin x}{x^2}) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} F'(x) = f'(0) - \dfrac{f'(0)}{2} = \dfrac{f'(0)}{2}$. (Il suffit de faire un développement limité pour calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x^2}\displaystyle\int_0^x \cos t(f(t)-f(0))dt$.) Il en résulte que $F'(0) = \frac{f'(0)}{2}$.

3=2+1 3. Soit $f(x) = |x|$. Pour $x > 0$, $F(x) = \dfrac{1-\cos x}{x}$ et pour $x < 0$, $F(x) = -\dfrac{1-\cos x}{x}$. Donc $F'(0+) = \frac{1}{2} = -F'(0-)$. F n'est pas dérivable en 0.

---

4. Comme $f(x)$ admet une limite quand x tend vers $+\infty$, alors f est bornée sur $[0, +\infty[$. De plus pour $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que $|f(x) - \ell| \le \varepsilon$ pour tout $x \ge A$.

2

$$F(x) = \frac{\cos x}{x}\int_0^A f(t)\cos t dt + \frac{\cos x}{x}\int_A^x (f(t)-\ell)\cos t dt + \ell\frac{\cos x}{x}(\sin x - \sin A)$$

$$+\quad \frac{\sin x}{x}\int_0^A f(t)\sin t dt + \frac{\sin x}{x}\int_{A}^{x}(f(t)-\ell)\sin t dt + \ell\frac{\sin x}{x}(\cos A - \cos x)$$

Il résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

---

5. $T(g'')(x) = \dfrac{g'(x)}{x} - \dfrac{\cos x}{x}g'(0) + \dfrac{\sin x}{x}g(0) - T(g)$, donc

2

$$T(f)(x) = \frac{g'(x)}{x} - \frac{\cos x}{x}g'(0) + \frac{\sin x}{x}g(0).$$

---

6. a) Soit $f \in E$ telle que $T(f) = 0$, alors $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\cos x \int_0^x f(t)\ \cos t dt + \sin x \int_0^x f(t)\ \sin t dt = 0.$$

Comme f est continue, on dérive cette identité, on aura

2

$$(*) \qquad f(x) = \sin x \int_0^x f(t)\ \cos t dt - \cos x \int_0^x f(t)\ \sin t dt.$$

Il en résulte que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

---

b) On dérive l'identité $(*)$, on aura $f'(x) = \cos x \displaystyle\int_0^x f(t)\ \cos t\ dt + \sin x \int_0^x f(t)\ \sin t\ dt =$

$3 = 2 + 1$

0, donc $f = 0$ car $f(0) = 0$. Donc T est injective sur E.

---

7. a) Soit $g \in E'$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^x tg(t)dt + xg'(x) + g(x)$. f est bien continue et $f(0) = g(0)$ et f est dérivable en 0.

$3 = 1 + 2$

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-t)\Big(\int_0^t sg(s)ds\Big)dt + \frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-t)tg'(t)dt \\ &+ \frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-t)g(t)dt \end{aligned}$$

On applique le théorème de Fubini à la première intégrale, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\int_0^x \cos(x-t)\Big(\int_0^t sg(s)ds\Big)dt &= \frac{1}{x}\int_0^x sg(s)\Big(\int_s^x \cos(x-t)dt\Big)ds \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x sg(s)\sin(x-s)ds. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x tg'(t)\cos(x-t)dt = g(x) - \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\cos(x-t)dt - \frac{1}{x}\int_0^x tg(t)\sin(x-t)dt.$$

Donc $T(f)(x) = g(x)$.

---

2 b) Il en résulte que T est surjective de E dans E', et d'après la question précédente, T est un isomorphisme de E dans E'.

---

8. Si $f \in E'$, alors $F = T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $xF'(x)+F(x) = f(x) - \int_0^x f(t)\ \sin(x-t)dt$. Donc F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.

3 = 1 + 2 $xF''(x) + 2F'(x) = f'(x) - \int_0^x f(t)\ \cos(x-t)dt = f'(x) - xF(x)$. Donc

$$xF''(x) + 2F'(x) + xF(x) = f'(x).$$

---

9. Si $u = xy$, $u' = xy' + y$ et $u'' = xy'' + 2y'$. Donc u vérifie l'équation différentielle $u'' + u = 0$, et donc $u = \alpha\cos x + \beta\sin x$. Il en résulte que $y = \alpha\frac{\cos x}{x} + \beta\frac{\sin x}{x}$. Comme

2 = 1 + 1 on cherche les solutions dans E", alors $y = \beta\frac{\sin x}{x}$.

Partie II

1.

2 a) $f \in E$ et $T(f) = \lambda f$, alors $f \in E'$ et $T(f) = \lambda f \in E$", donc $f \in E$".

---

b) Comme F vérifie $xF"(x)+2F'(x)+xF(x) = f'(x)$ dans $\mathbb{R}^*$ et $F = \lambda f$, alors f vérifie sur $\mathbb{R}^*$ l'équation différentielle

3 (D_λ). $$xy'' + \frac{2\lambda - 1}{\lambda}y' + xy = 0$$

---

2 c) Si $\lambda \neq 1$, on a $F(0) = f(0) = \lambda f(0)$, donc $f(0) = 0$.

---

2. Inversement

a) Soit $f \in E$" solution dans $\mathbb{R}^*$ de l'équation (D_1), d'après ce qui précède il existe une
3=1+2 fonction $g \in E$ telle que $T(g) = f$. Donc f vérifie $xf'' + 2f' + xf = g'$, de plus f vérifie $xf'' + f' + xf = 0$. Donc $f' = g'$, et $f = g + c$. $f(0) = g(0)$, donc $c = 0$ et $T(f) = f$.

---

b) Soit $f \in E$" solution dans $\mathbb{R}^*$ de l'équation (D_λ), avec $\lambda \neq 1$ et $f(0) = 0$. Soit $g \in E$
3 telle que $T(g) = f$, alors f vérifie l'équation différentielle $xf'' + 2f' + xf = g'$. Il en résulte que $f' = \lambda g'$, et comme $f(0) = g(0)$, alors $f = \lambda g$ et $T(f) = \lambda T(g) = \lambda f$.

---

3. Si f vérifie $D_{\frac{1}{2}}$, alors f vérifie $xf''(x) + xf(x) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, donc $f'' + f = 0$
3=2+1 et $f(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$. $f(0) = 0$, alors $f(x) = \beta \sin x$.

---

4. Si $y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$. On a:

$$0 = xy'' + \frac{2\lambda - 1}{\lambda} y' + xy = \sum_{k \geq 0} (k+1)\left(\frac{2\lambda - 1}{\lambda} + k\right) a_{k+1} x^k + \sum_{k \geq 1} a_{k-1} x^k.$$

3=2+1 Il en résulte que $\frac{2\lambda-1}{\lambda} a_1 = 0$ et $(k+1)(\frac{2\lambda-1}{\lambda} + k)a_{k+1} = -a_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. Donc $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la suite $(a_{2k})_k$ vérifie la relation de récurrence

$$2k\left(2k + 1 - \frac{1}{\lambda}\right) a_{2k} = -a_{2k-2}, \quad k \geq 1.$$

qui admet une solution. $\left|\frac{a_{2k-2}}{a_{2k}}\right| \to +\infty$ quand $k \to +\infty$. Donc le rayon de convergence est ∞.

5.

4
$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!(n+k)!} x^{2(n+k)}$$

Cette série converge sur $\mathbb{R}$ et $T(y_n) = \frac{1}{2n+1}\, y_n$.

---

6. a) Pour $n \geq 1$,

2
$$y_n' = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!(n+k-1)!} x^{2(n+k)-1} = 2x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!(n+k-1)!} x^{2(n-1+k)} = 2xy_{n-1}.$$

---

b) $T(y_n) = \dfrac{1}{2n+1} y_n$, donc $y_n = \displaystyle\int_0^x \frac{t}{2n+1} y_n(t)dt + \frac{x}{2n+1} y_n'(x) + \frac{1}{2n+1} y_n$. Comme $t y_n(t) = \dfrac{1}{2} y_{n+1}'$, on aura $2n y_n(x) = \dfrac{1}{2} y_{n+1}(x) + x y_n'(x)$, soit

3=2+1

$$4(n-1) y_{n-1}(x) = y_n(x) + 2x y_{n-1}'(x)$$

De plus y_{n+1} vérifie l'équation différentielle $x y_{n+1}'' - (2n+1) y_{n+1}' + x y_{n+1} = 0$. $y_{n+1}' = 2x y_n$, $y_{n+1}'' = 2x y_n' + 2y_n = 4x^2 y_{n-1} + 2y_n$. Donc

$$y_{n+1} - 4n y_n + 4x^2 y_{n-1} = 0.$$

---

7. Comme pour $n \in \mathbb{N}$, y_n est solution de l'équation différentielle

$$x y'' - (2n-1) y' + x y = 0,$$

donc J_n est solution de l'équation différentielle

3=2+1

$$(\mathcal{E}_n) \qquad x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - n^2) y(x) = 0.$$

Pour $n \leq 0$, il suffit de remplacer J_n par $(-1)^n J_{-n}$.

---

8. a) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

2

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

---

b)

$$\cos(x \sin t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} (\sin t)^{2n}}{(2n)!};$$

2

La série précédente converge uniformément par rapport à t sur $\mathbb{R}$, donc

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin t)^{2n} dt = J_0(x)$$

Partie III

1. a) Pour tout $n \geq 1$, $y_{n+1} - 4n y_n + 4x^2 y_{n-1} = 0$, donc $(2x)^{n+1} J_{n+1} - 4n(2x)^n J_n + (2x)^{n+1} J_{n-1} = 0$, en divisant par $2(2x)^n$, on aura $x J_{n+1} - 2n J_n + x J_{n-1} = 0$. Cette relation est encore valable pour $x = 0$ et $n = 0$. On remplaçant J_n par $(-1)^n J_{-n}$, cette dernière reste valable pour $n \leq 0$.

3=2+1

---

b) On a $y_n' = 2xy_{n-1}$. $y_n' = (2x)^n J_n' + 2n(2x)^{n-1}J_n = (2x)^n J_{n-1}$. Pour $x \neq 0$ on aura $xJ_n' = -nJ_n + xJ_{n-1}$. Cette relation reste vrai pour $n = 0$ et pour $n \leq 0$, il suffit de multiplier par $(-1)^n$.

4= 2+2

On a la relation $y_{n+1} - 4ny_n + 2xy_n' = 0$. Avec les même argument que précédemment on aura $xJ_n' = nJ_n - xJ_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2.

$$\psi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)e^{\mathrm{i}nt} + \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(x)e^{\mathrm{i}nt} + J_0(x).$$

$$J_n(x) = (\frac{x}{2})^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k k!(n+k)!}, \text{ donc } |J_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|x|^{2k}}{k!} \leq e^{(x^2)}\frac{|x|^n}{n!},\ n \geq 0.$$

Il en résulte que les séries

5= 2+3

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x)e^{\mathrm{i}nt} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(x)e^{\mathrm{i}nt}$$

sont convergentes et convergent absolument et uniformément sur $[-A, A]\times\mathbb{R}$, pour tout $A > 0$.

De même $J_n' = \frac{1}{2}(J_{n-1} - J_{n+1})\,;\, n \geq 1,\ |J_n'| \leq (1+x^2)e^{x^2}\frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$.

---

3. a)

6= 3+3

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial\theta}(x,\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}nJ_n(x)e^{\mathrm{i}n\theta} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}}{2}xJ_{n+1}(x)e^{\mathrm{i}n\theta} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}}{2}xJ_{n-1}(x)e^{\mathrm{i}n\theta} \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}xe^{-\mathrm{i}\theta}\psi(x,\theta) + \frac{\mathrm{i}}{2}xe^{\mathrm{i}\theta}\psi(x,\theta) = \mathrm{i}x\psi(x,\theta)\cos\theta.
\end{aligned}$$

D'après ce qui précède $xJ_n' = \frac{1}{2}(xJ_{n-1} - xJ_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}
2x\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} xJ_{n-1}(x)e^{\mathrm{i}n\theta} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} xJ_{n+1}(x)e^{\mathrm{i}n\theta} \\
&= xe^{\mathrm{i}\theta}\psi(x,\theta) - xe^{-\mathrm{i}\theta}\psi(x,\theta) \\
&= 2\mathrm{i}x\sin\theta\psi(x,\theta).
\end{aligned}$$

2

b) $\dfrac{\partial g}{\partial\theta} = 0.$

c) donc $g(x,\theta) = h(x)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $x\dfrac{\partial\psi}{\partial x}(x,\theta) = \mathrm{i}x\sin\theta\,\psi(x,\theta)$, on aura : $h'(x) = 0$, comme $h(0) = \psi(0,\theta) = 1$, donc $\psi(x,\theta) = e^{\mathrm{i}x\sin\theta}$.

$J_n(x)$ est le coefficient exponentiel de Fourier de l'application $\theta \longmapsto \psi(x,\theta)$ il est donné

5= 2+3 par

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}x\sin\theta}e^{-\mathrm{i}n\theta}d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta.$$

---

4. Pour tout $r > 0$, la fonction $\theta \longmapsto U(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^2$, 2π-périodique. Donc elle coïncide avec la somme de sa série de Fourier.

$$U(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(r)e^{\mathrm{i}n\theta}, \quad \forall\theta\in\mathbb{R},$$

2

avec $C_n(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} U(r\cos\theta, r\sin\theta)e^{-\mathrm{i}n\theta}d\theta$.

---

5. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral C_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$, $C_n'(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial U}{\partial r}(r\cos\theta, r\sin\theta)e^{-\mathrm{i}n\theta}d\theta$ et $C_n''(r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)e^{-\mathrm{i}n\theta}d\theta$.

En faisant deux intégrations par parties on aura pour tout $n\in\mathbb{Z}$:

4 = 2+2

$$-n^2C_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)e^{-\mathrm{i}n\theta}d\theta.$$

$$\begin{aligned} r^2C_n''(r) &+ rC_n'(r) + (\lambda r^2 - n^2)C_n(r) \\ &= r^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\Delta U(r\cos\theta, r\sin\theta) + \lambda u(r\cos\theta, r\sin\theta)]e^{-\mathrm{i}n\theta}d\theta = 0. \end{aligned}$$

---

6. Pour $t = \sqrt{\lambda}r$, on pose $C_n(r) = \alpha_n J_n(t)\varphi_n(t)$, φ_n vérifie l'équation différentielle $(\mathcal{E}_n)$. On sait que J_n est une solution de $(\mathcal{E}_n)$, donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n J_n(\sqrt{\lambda}r)e^{\mathrm{i}n\theta}$ est une solution de

2 l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$, pour toute suite bornée $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. D'après III-2 $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_n J_n(\sqrt{\lambda}r)e^{\mathrm{i}n\theta}$ est de classe $\mathcal{C}^2$.

---

7. Si $\alpha_n = 1$, la fonction $f(x,y) = e^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}y}$ est une solution. Si $\alpha_n = e^{\mathrm{i}n\pi/2}$, la fonction

2= 1+1 $g(x,y) = e^{\mathrm{i}\sqrt{\lambda}x}$ est une solution.